



**Zadania na XVII Podkarpacki Konkurs Matematyczny
im. Franciszka Lejona
Poziom II**

(klasy drugie liceum i trzecie technikum)

Etap powiatowy

4 lutego 2017 r. godzina 10.00

(150 minut)

1. Mianownik pewnego nieskracalnego ułamka, będącego ilorazem dwóch liczb naturalnych, jest większy o 7 od kwadratu licznika tego ułamka. Jeżeli licznik tego ułamka powiększymy o 1, to otrzymamy $\frac{1}{4}$. Co to za ułamek?
2. Wykaż, że liczba $\frac{n^3}{48} + \frac{n^2}{8} + \frac{n}{6}$ jest całkowita dla dowolnego n całkowitego parzystego.
3. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, x, y, z zachodzi nierówność:
$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2.$$
4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = 6$ oraz $|AC| = |BC| = 5$. Na boku BC umieszczono punkt D. Przez punkt D poprowadzono dwie proste: równoległą do boku AB oraz prostopadłą do boku AB. Proste te podzieliły trójkąt ABC na dwa trójkąty i trapez. Oblicz długości odcinków BD i DC wiedząc, że suma pól otrzymanych w wyniku podziału dwóch trójkątów osiągnęła najmniejszą możliwą wartość.
5. W trójkąt prostokątny wpisano kwadrat o boku a , którego dwa boki są zawarte w przyprostokątnych trójkąta a jeden wierzchołek leży na przeciwprostokątnej. Wierzchołek kwadratu podzielił przeciwprostokątną na odcinki o długości k i l . Wykaż, że $\frac{1}{k^2} + \frac{1}{l^2} = \frac{1}{a^2}$.

Powodzenia!